Inductieve waarschijnlijkheid, de basis van inductieve logica

Kuipers, Theodorus

Published in:
Algemeen Nederlands tijdschrift voor wijsbegeerte

Publication date:
1972

INDUCTIEVE WAARSCHIJNLIJKHEID DE BASIS VAN INDUCTIEVE LOGICA*

door

Theo A. F. Kuipers

1 INLEIDING In de inductieve logica wordt getracht redeneerregels op te stellen die aangeven wanneer een conclusie getrokken mag worden uit premissen, die de conclusie wel een bepaalde aannemelijkheid geven, maar deze niet (deductief) logisch impliceren. Dergelijke regels vooronderstellen o.a. een graad van aannemelijkheid, ook wel genoemd een *inductieve waarschijnlijkheid*, van de conclusie op basis van de premissen. Carnap, die in de inductieve logica niet verder wil gaan dan de explicatie van het inductieve waarschijnlijkheidsbegrip, is er in [1] in geslaagd een inductieve waarschijnlijkheidsfunctie te construeren voor een betrekkelijk eenvoudige probleemstelling, waardoor de inductieve logica een beslissende stap vooruit is gebracht. Dit systeem van Carnap zal in dit artikel geschetst en nader geanalyseerd worden. Het artikel wordt besloten met een beknopt overzicht van de verdere ontwikkelingen van de inductieve logica.

Een strikt formele behandeling van het systeem van Carnap in termen van proposities vereist veel formalisme dat niet bijdraagt tot een beter begrip, reden waarom hier gekozen is voor een behandeling in termen van gebeurtenissen aan de hand van een empirisch model, dat uitsluitend tot hulpmiddel dient en waarvan in een formele behandeling geabstraheerd wordt. Bij de hier gebruikte aanloop tot inductieve waarschijnlijkheid zijn nog enkele definities vereist. Onder het *weddenschapsquotiënt* van een deelnemer aan een bepaalde weddenschap wordt verstaan het bedrag dat de deelnemer moet afstaan als hij ongelijk krijgt, gedeeld door de som van genoemd bedrag en het bedrag dat hij krijgt als hij gelijk blijkt te hebben. Bij de meeste weddenschappen is de inzet van beide deelnemers gelijk, zodat het weddenschapsquotiënt dan $\frac{1}{2}$ bedraagt. De mate waarin de deelnemer gelooft in zijn gelijk, *de graad van geloof*, wordt gedefinieerd als het grootste weddenschapsquotiënt op basis waarvan hij nog wil wedden om zijn gelijk.

2 PROBLEEMSTELLING Het systeem van Carnap kan geïntroduceerd worden met de volgende probleemstelling.

Stel, we hebben een bol waarvan de oppervlakte zo gekleurd is dat ieder punt òf rood òf wit òf zwart is; deze drie kleuren hoeven echter niet allemaal voor te komen, de bol kan b.v. helemaal rood zijn. Het resultaat van een worp met de bol is de kleur van het rustpunt. Een proefpersoon is aanvankelijk alleen op de hoogte van bovenstaande gegevens. Als we

* G. F. A. K. van Benthem, prof. dr. J. J. A. Mooij en H. A. P. Swart ben ik zeer dankbaar voor de vele kritische opmerkingen die zij hebben gemaakt naar aanleiding van eerdere versies van dit artikel.

nu een aantal malen werpen met de bol en het resultaat steeds meedelen aan de proefpersoon, dan kan vervolgens door ondervraging vastgesteld worden wat zijn graad van geloof is in de hypothese dat de volgende worp zal resulteren in rood.

Hier zijn we echter niet zozeer geïnteresseerd in dit empirisch probleem van de feitelijke graad van geloof, als wel in de vraag of de proefpersoon een *rationele graad van geloof* op basis van zijn gegevens kan vaststellen, of, anders geformuleerd, wat de graad van geloof in de genoemde hypothese zou zijn van een rationeel proefpersoon. Door de aard van het empirisch model kunnen we het probleem ook als volgt formuleren: kan de proefpersoon in ieder stadium een verantwoorde schatting maken van de objectieve waarschijnlijkheid van rood, die, als het een 'eerlijke' bol is, gelijk is aan de roodgekleurde oppervlakte gedeeld door de totale oppervlakte van de bol?

Het gestelde probleem blijkt (nog) niet in deze vorm oplosbaar te zijn, maar het volgende, iets minder pretentieuze probleem is wel oplosbaar. Een proefpersoon blijkt nl. op zeer systematische wijze een *samenhang* tussen de graden van geloof op ieder moment van het proces te kunnen kiezen.

3 CRITERIA Om te komen tot deze systematische samenhang moet de proefpersoon zich laten leiden door de volgende 'rationaliteitscriteria':

a Noch de volgorde van de resultaten, noch de specifieke kleuren zijn van belang, maar alleen het totaal aantal mogelijke kleuren en de geobserveerde relatieve frequentie van de kleur waar de hypothese betrekking op heeft.

b De graden van geloof in de hypothese dat de volgende worp resulteert in de kleur X moeten gesommeerd over alle mogelijke kleuren 1 opleveren; er moet tenslotte bij iedere worp een kleur te voorschijn komen. Dit criterium komt er op neer dat de graden van geloof aan de axioma's van de waarschijnlijkheidsrekening moeten voldoen.

Uit de eerste twee criteria volgt dat de graad van geloof in de hypothese dat de eerste worp resulteert in die en die kleur voor alle kleuren gelijk moet zijn en wel aan het omgekeerde van het aantal mogelijkheden.

c De proefpersoon probeert te leren van zijn ervaring, d.w.z. als de worpen relatief vaker in de ene dan in de andere kleur resulteren, zullen zijn graden van geloof in de corresponderende hypothesen op overeenkomstige wijze verschillen. Bovendien zal hij zich in het beginstadium niet alleen laten leiden door zijn eerste (empirische) indrukken; als b.v. de eerste twee worpen rood opleveren dan zal hij rekening blijven houden met de mogelijkheid dat de derde worp een andere kleur oplevert.

Indien de proefpersoon op basis van bovenstaande criteria voor een samenhang tussen de graden van geloof kiest, zullen we deze laatste inductieve waarschijnlijkheden noemen.

4 RESULTAAT Om het resultaat van de toepassing van de in paragraaf 3 gestelde criteria op de aan het slot van paragraaf 2 geschetste probleemstelling te formuleren, zijn enkele notationele afspraken vereist. In het volgende is k het aantal mogelijke kleuren (in paragraaf 2 was k gelijk aan

3); s is het aantal gedane worpen; en r is het aantal malen dat rood optrad.

Men denkt wellicht dat r/s de geëigende waarde is voor de inductieve waarschijnlijkheid van de hypothese die stelt dat de eerste worp na bovengenoemde s worpen zal resulteren in rood, maar dit is niet het geval. Om aan de gestelde criteria te voldoen moet er een parameter x worden ingevoerd die staat voor een positief reëel getal, dat vooraf, d.w.z. vóór de eerste worp, gekozen moet worden door de proefpersoon. De inductieve waarschijnlijkheid van de hypothese 'volgende worp rood' kan dan afgeleid worden en blijkt gelijk te zijn aan $\frac{r + x/k}{s + x}$. De vrij ingewikkelde afleiding kan men o.a. vinden in [2].

Met behulp van deze functie en de wetten van de waarschijnlijkheidsrekening is het mogelijk de inductieve waarschijnlijkheid van allerlei andere hypothesen te berekenen, zoals van de hypothese die stelt dat de eerstvolgende tien worpen alle zullen resulteren in rood.

5 F- EN L-WAARSCHIJNLIJKHEID De randwaarden van boven geformuleerde inductieve waarschijnlijkheidsfunctie worden verkregen door x gelijk aan 0 te kiezen, resp. door x naar oneindig te laten gaan.

Voor $x = 0$ krijgen we r/s, dat is de geobserveerde relatieve frequentie van rood. (Voor $s = 0$, en dus $r = 0$, is deze functie niet gedefinieerd, maar het ligt voor de hand in dit geval de waarde 1/k te nemen, omdat voor elke $x \neq 0$ en voor $s = r = 0$ de inductieve waarschijnlijkheidsfunctie gelijk is aan 1/k en dus ook de limiet van deze functie voor x gaat naar 0). De functie r/s specificeert echter geen inductieve waarschijnlijkheid omdat niet voldaan is aan het laatste deel van criterium *c* waar geëist werd dat men zich niet alleen zou laten leiden door de eerste indrukken en dat schrijft de functie r/s juist voor. Met enige aarzeling wordt r/s hier voortaan de F-waarschijnlijkheid van rood genoemd, analoog aan het begrip 'F(actual)-true/false' voor deductieve systemen. De term F-waarschijnlijkheid dient ter aanduiding van de geobserveerde relatieve frequentie van rood na s worpen en mag niet verward worden met de *objectieve waarschijnlijkheid* van rood: de kans dat een *willekeurige* worp resulteert in rood.

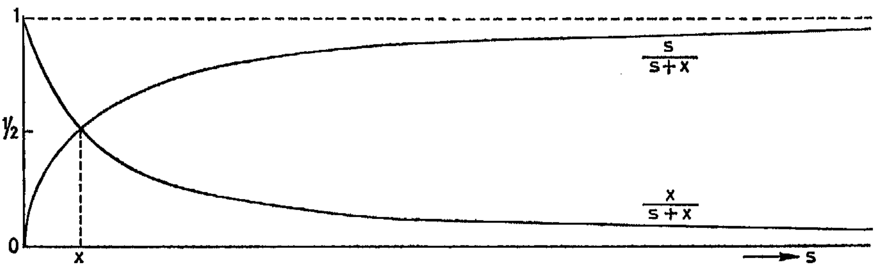
Als we x naar oneindig laten gaan, dan krijgen we de constante waarde 1/k, die we de *L-waarschijnlijkheid* noemen, analoog aan het begrip 'L-true/false' voor deductieve systemen. Deze functie is ook geen inductieve waarschijnlijkheidsfunctie omdat niet voldaan is aan het eerste deel van criterium *c*, want hoe vaak rood ook optreedt, men blijft met deze functie staan bij het uitgangspunt, of, anders gezegd, men is niet bereid te leren van ervaring.

6 OPBOUW VAN DE INDUCTIEVE WAARSCHIJNLIJKHEIDSFUNCTIE De functie $\frac{r + x/k}{s + x}$, met $0 < x < \infty$, kunnen we schrijven als:

$\frac{s}{s + x} \cdot (r/s) + \frac{x}{s + x} \cdot (1/k)$, en dit is te beschouwen als de *gewogen* som van de F- en de L-waarschijnlijkheid. De gewichten $\frac{s}{s+x}$ en $\frac{x}{s+x}$ zijn niet afhankelijk van k en r en hun som is 1 (!). Deze gewichten blijken op zeer inzichtelijke wijze het leerproces te karakteriseren dat door de functie wordt beschreven.

Bij de start, $s = 0$, is het gewicht van de F-waarschijnlijkheid gelijk aan 0 en dat van de L-waarschijnlijkheid gelijk aan 1, zodat de inductieve waarschijnlijkheid dan gelijk is aan $1/k$. Als s groter wordt neemt het gewicht van de F-waarschijnlijkheid toe en dat van de L-waarschijnlijkheid af. En als s naar oneindig gaat, dan gaat het gewicht van de F-waarschijnlijkheid naar 1 en dat van de L-waarschijnlijkheid naar 0. De inductieve waarschijnlijkheid nadert dan de limietwaarde van r/s en dit is precies de definitie van de objectieve waarschijnlijkheid volgens de gangbare statistische theorieën. De gewichten zijn beide gelijk aan $\frac{1}{2}$ voor $s = x$, hetgeen alleen kan voorkomen als x een geheel getal is, wat niet hoeft.

Een grafiekje geeft het hele verloop weer:



Verschillende keuzen van x veranderen de structuur, de 'rationele' samenhang van deze grafiek niet. Er zijn nogal wat motiveringen aangevoerd om x groot dan wel klein te kiezen, maar dit heeft nog niet tot een algemeen aanvaarde aanbeveling geleid. Uit het voorgaande blijkt in ieder geval wel dat de keuze van x precies de gewichten bepaalt die men *in een bepaald stadium* aan de F- en de L-waarschijnlijkheid wenst toe te kennen; en naarmate men x groter kiest, blijft de L-waarschijnlijkheid de F-waarschijnlijkheid langer overheersen door de toegekende gewichten aan beide. Het idee van Carnap om x te laten afhangen van het aantal kleuren (dus van k) is echter bijzonder onaantrekkelijk, omdat dan met evenveel reden x afhankelijk zou kunnen worden gemaakt van r en dat zou niemand verantwoord vinden. De mogelijkheid van de hier gepresenteerde analyse in termen van gewichten is door Carnap, althans blijkens zijn publikaties, niet gezien. Indien dat wel het geval zou zijn geweest zou hij genoemd idee wellicht afgewezen hebben.

Het gewicht van de F-waarschijnlijkheid gedeeld door het gewicht van de L-waarschijnlijkheid is s/x. Deze grootheid is te beschouwen als een maat voor de bereidheid van een rationeel proefpersoon om in een bepaald stadium van het onderzoek zijn verwachtingen op basis van apriorische gegevens te corrigeren m.b.v. inmiddels verkregen empirische gegevens.

7 INDUCTIEVE LOGICA OP DIT OGENBLIK

a Een van de onvolkomenheden van het besproken systeem is dat in een 'echte' inductieve situatie het aantal mogelijke kleuren niet bekend is. Formeel komt dit erop neer dat de functie direct afhangt van het aantal predikaten dat in de taal is opgenomen. Deze *taalafhankelijkheid* van de besproken inductieve waarschijnlijkheidsfunctie kan echter voorkomen worden. Het blijkt namelijk zeer goed mogelijk te zijn de probleemstelling waarbij het aantal mogelijke kleuren niet gegeven is op analoge wijze te behandelen door twee reeksen gebeurtenissen te beschouwen. De eerste reeks geeft aan of er al dan niet een nieuwe kleur optrad bij de laatste worp. De tweede reeks specificeert welke kleur het laatst optrad in geval het een reeds eerder geobserveerde kleur betreft. Men krijgt zo een inductieve waarschijnlijkheidsfunctie, met twee parameters, die is samengesteld uit twee functies van het type dat behandeld werd in dit artikel. Voor details leze men [3].

b De tweede onvolkomenheid van het besproken systeem betreft de beperking tot individuele gebeurtenissen (individuele proposities). Ook hier is de ontwikkeling van de inductieve logica al veel verder; Hintikka beschrijft in [4] een taalafhankelijk systeem waarin universele en individuele proposities zijn ondergebracht. Met name geeft dit systeem inductieve waarschijnlijkheden voor een universele hypothese op basis van bepaalde observatie-gegevens (evidence). De belangrijke stap die bij de constructie van dit systeem gezet is, is de toekenning van een begin-waarschijnlijkheid, groter dan 0, aan universele hypothesen. (Popper heeft altijd met klem tegengesproken dat een dergelijk systeem construeerbaar zou zijn.) De constructie van dit systeem vindt wederom plaats op basis van het in dit artikel beschreven systeem. De hypothese 'alle worpen resulteren in rood' krijgt b.v. een begin-waarschijnlijkheid vergelijkbaar met die van de hypothese 'de eerste y worpen resulteren in rood' in het hier behandelde systeem, met y groter dan 0 en eindig (zie par. 4). In dit systeem wordt y een tweede, vrij te kiezen, parameter naast x. Helaas heeft dit systeem alle kenmerken om praktisch onhanteerbaar te zijn, maar vereenvoudigingen lijken niet uitgesloten.

c Een van de belangrijke taken die op dit ogenblik te verrichten zijn is de constructie van een *taalonafhankelijk* systeem dat *zowel individuele als universele proposities* omvat. Als het systeem van Hintikka taalonafhankelijk gemaakt kan worden, al of niet vergelijkbaar met de manier waarop het systeem van Carnap taalonafhankelijk werd gemaakt in [3], en daar is alle kans op, omdat het een puur technische aangelegenheid lijkt te zijn, dan kan definitief worden vastgesteld dat inductieve logica, althans m.b.t. een essentiëel onderdeel ervan, nl. inductieve waarschijnlijkheid, principiëel mogelijk is.

d Met betrekking tot de opstelling van inductieve redeneerregels lijken de perspectieven ook gunstig. Hilpinen beschrijft in [5] een inductieve variant van modus ponens, genaamd AGn en gebaseerd op het systeem van Hintikka, die aan de volgende belangrijke eisen voldoet: de universele conclusies, die met behulp van deze regel volgen uit een aantal individuele premissen, zijn consistent en deductief gesloten.

LITERATUUR WAARNAAR VERWEZEN WERD:

[1] RUDOLF CARNAP, *The Continuum of Inductive Methods*, 1952.

[2] JOHN KEMENY, 'Carnap's Theory of Probability and Induction', in P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, 1962, II-22.

[3] THEO KUIPERS, 'A Generalization of Carnap's Inductive Logic', verschijnt in *Synthese*, 25,1 (gewijd aan Carnap).

[4] JAAKKO HINTIKKA, 'A Two-dimensional Continuum of Inductive Methods', in J. Hintikka en P. Suppes (eds.), *Aspects of Inductive Logic*, 1966, pp. 113-132.

[5] RISTO HILPINEN, 'Rules of Acceptance and Inductive Logic', *Acta Philosophica Fennica*, Fasc. XXII, 1968.